

ANALISI SPERIMENTALE DELLA SINCRONIZZAZIONE DI RETI COMPLESSE CON CIRCUITI DI CHUA COME NODI

Marco Colandrea⁽¹⁾, Massimiliano de Magistris⁽¹⁾ Mario di Bernardo⁽²⁾, Sabato Manfredi⁽²⁾

(1) Dipartimento di Ingegneria Elettrica - (2) Dipartimento di Informatica e Sistemistica
Università di Napoli FEDERICO II – via Claudio 21, I-80125 NAPOLI

Il fenomeno della sincronizzazione è presente in innumerevoli sistemi di interesse per le Scienze e per l'Ingegneria. Esempi classici sono i pendoli di Huygens, i sistemi circadiani, il cuore, i clocks per i sistemi GPS etc. (si veda ad esempio in [1] e nelle referenze lì citate).

Il modo più comune per investigare il fenomeno è la descrizione dell'insieme dei sistemi (circuiti) che sincronizzano come una rete complessa di N_c sistemi dinamici elementari identici (o quasi identici) descritti da equazioni del tipo:

$$\dot{x}_i = f(x_i) + c \sum_{j=1}^{N_c} a_{ij} \Gamma x_j, \quad i = 1, 2, \dots, N_c, \quad a_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_c} a_{ij} = - \sum_{j=1, j \neq i}^{N_c} a_{ji} \quad (1)$$

dove $x_i \in \mathbb{R}^n$ è lo stato vettore del nodo i , la costante $c > 0$ rappresenta la forza di accoppiamento, ed ancora $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ è una matrice costante binaria che definisce quali sono le variabili di stato accoppiate. La matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{N_c \times N_c}$ definisce invece le configurazioni di accoppiamento tra i nodi (matrice Laplaciana associata al grafo della rete).

Strumento fondamentale per l'analisi della sincronizzazione e delle sue proprietà è la Master Stability Function, introdotta da Pecora and Carroll in [2], basata sull'idea di stabilire la stabilità trasversale del manifold di sincronizzazione ($x_1 = x_2 = \dots = x_{N_c}$) considerando il più grande esponente di Lyapunov della dinamica dei nodi. Se il prodotto della "forza" di accoppiamento e gli autovalori della matrice Laplaciana sono nel range in cui la MSF è negativa, dunque il manifold è stabile e si realizza la sincronizzazione. Nonostante gli innumerevoli sviluppi presenti in letteratura della teoria MSF e l'analisi teorico-numerica di numerosi sistemi a dinamica anche caotica accoppiati in reti complesse [3], la verifica sperimentale di tali risultati è in realtà disponibile solo per configurazioni regolari (lattices) o con numeri molto esigui (2-3) sistemi nodo [4].

L'obiettivo della ricerca in corso è quello di colmare l'attuale gap nella letteratura tra lo sviluppo degli strumenti teorici e gli esperimenti. In particolare è di interesse la realizzazione di un apparato sperimentale specificamente progettato per l'analisi della sincronizzazione di reti di sistemi dinamici a dinamica complessa, con elevate caratteristiche di affidabilità, flessibilità della configurazione (topologia) e dei parametri di interconnessione (forza d'accoppiamento) dei nodi, scalabilità a sistemi di elevati numeri di nodi, possibilità di controllo dei parametri dei sistemi "nodo". Con tali obiettivi è stato realizzato un set-up sperimentale presso il Dipartimento di Ingegneria Elettrica dell'Università di Napoli FEDERICO II, descritto schematicamente in figura 1, che realizza l'insieme sistemi-nodo, la rete di connessione dei nodi ed il sistema di acquisizione interamente basato su controllo USB. In particolare è possibile controllare i parametri dimensionali dei singoli circuiti di Chua, la configurazione di interconnessione, rilevare automaticamente i livelli di sincronizzazione ed acquisire le forme d'onda. Attualmente il sistema è stato completamente testato sul caso con 4 nodi Chua identici, permettendone una validazione sperimentale già attualmente decisamente

più significativa di quanto presente in letteratura [5], in particolare in riferimento alla dipendenza dalla topologia di connessione come indicato in figura 3. In figura 4 è mostrato l'ottimo accordo dei risultati sperimentali con la teoria MSF. E' attualmente in fase di test il caso con 8 circuiti di Chua, che rapidamente porterà a scalare il sistema ad un numero di nodi di 16, 32, 64.

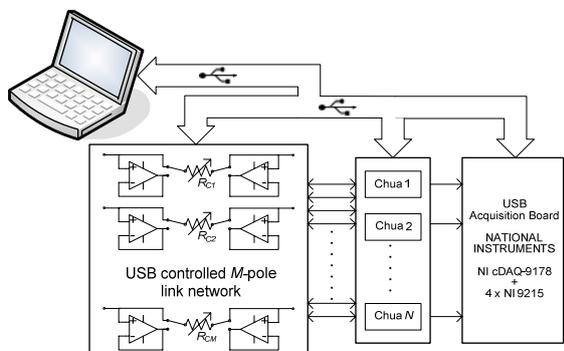


Fig.1 Schema di principio del setup sperimentale

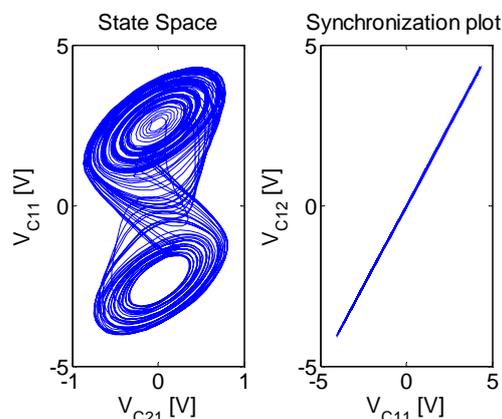


Fig.2 stato sincronizzato in dinamica caotica

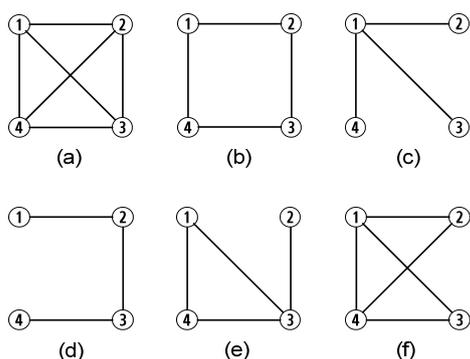


Fig.3 topologie di connessione considerate: a) globalmente connessa; b) anello; c) stella; d) array; e),f) "random"

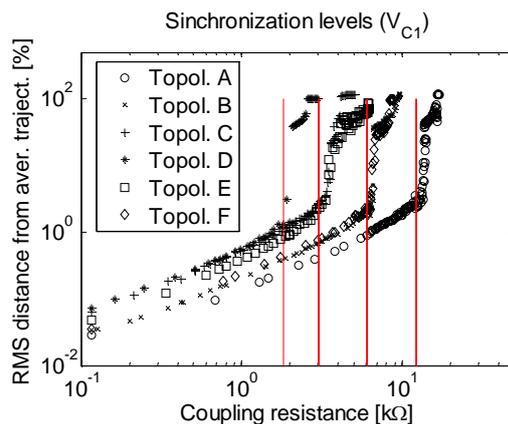


Fig.4 livelli di sincronizzazione in funzione della resistenza di accoppiamento per le diverse topologie; in verticale i valori di soglia previsti dalla teoria MSF

Referenze

- [1] Pikovsky, M. Rosenblum and J Kurths, "Synchronization. A universal concept in nonlinear sciences" Cambridge University Press, 2001.
- [2] L.M. Pecora, L Carroll, "Master Stability Functions for Synchronized Coupled Systems", Phis. Rev. Letters, vol.80, n.10, 1998.
- [3] L. Huang, Q. Chen, Y.-C. Lai, L. M. Pecora, "Generic behavior of master-stability functions in coupled nonlinear dynamical systems" Physical Review E 80, 2009.
- [4] C Posadas-Castillo, C Cruz-Hernández, R.M. López-Gutiérrez, "Experimental realization of synchronization in complex networks with Chua's circuits like nodes", Chaos Solitons & Fractals, vol 40, n 4, 2009.
- [5] M. Colandrea, M. de Magistris, M. di Bernardo, S. Manfredi, "Experimental Analysis and Synchronization of Networks of Chua circuits" submitted to Dynamic Days Europe 2010.